Tutorato Algebra Lineare - 02/07/25

Esercizio (APPLICAZIONI LINEARI con POLINOMI, DIAGONALIZZABILITÀ)

Sia $a \in \mathbb{R}$. Consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3

$$\mathcal{B}_a = \left\{ 1,\ x+a,\ x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + 1,\ 2x^3 + x^2 + 2x \right\}$$

1) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{B}_a$ è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$?

2) Consideriamo l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$T(f(x)) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \\ f'''(0) \end{pmatrix}.$$

$f^{(n)}(x)$ derivata n-esima del polinomio $f(x)$

Per i valori di a trovati nel punto 1), scrivere la matrice associata a T con base $\mathcal{B}_a$ in partenza e base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$ in arrivo.

3) Detta A la matrice determinata nel punto 2), studiare la diagonalizzabilità di A al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1) Come al solito, convertiamo il problema: POLINOMI $\longleftrightarrow$ VETTORI

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 3} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathbb{R}^4$$

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\ x &\longleftrightarrow e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \\ x^2 &\longleftrightarrow e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \\ x^3 &\longleftrightarrow e_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_a = \left\{ 1,\ x+a,\ x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + 1,\ 2x^3 + x^2 + 2x \right\}$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}a\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\a/2\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{linearmente indipendenti}$$

$\mathcal{B}_a$ base $\Updownarrow$ linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \longleftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a/2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - \frac{a}{2} R_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

PIVOT $\Updownarrow$ $a \neq 1$

Risposta: $\boxed{a \neq 1}$.

2) Supponiamo $a \neq 1$. La matrice cercata è

Non serve $[\ ]_e$: i vettori sono già scritti in coordinate rispetto alla base canonica e

$$A = M^{e}_{\mathcal{B}_a}(T) = \left([T(1)]_e \,\middle|\, T(x+a) \,\middle|\, T\left(x^3 + \tfrac{1}{2}a x^2 + 1\right) \,\middle|\, T\left(2x^3 + x^2 + 2x\right) \right)$$

Sappiamo che $T(f(x)) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \\ f'''(0) \end{pmatrix}$. Nel nostro caso:

$f(x)$	1	$x+a$	$x^3 + \frac{1}{2}a x^2 + 1$	$2x^3 + x^2 + 2x$
$f'(x)$	0	1	$3x^2 + a x$	$6x^2 + 2x + 2$
$f''(x)$	0	0	$6x + a$	$12x + 2$
$f'''(x)$	0	0	6	12

$x = 0$ (valutazione in $x = 0$)

$f(0)$	1	a	1	0
$f'(0)$	0	1	0	2
$f''(0)$	0	0	a	2
$f'''(0)$	0	0	6	12

Risposta: $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}}$.

3) Diagonalizzabilità di A in funzione di a.

Polinomio caratteristico:

$$P_A(t) = \det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} 1-t & a & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a-t & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 12-t \end{pmatrix}$$

$$= (1-t)\cdot\det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 2 \\ 0 & a-t & 2 \\ 0 & 6 & 12-t \end{pmatrix}$$

$$= (1-t)^2\cdot\det\begin{pmatrix} a-t & 2 \\ 6 & 12-t \end{pmatrix}$$

$$= (1-t)^2\left[(a-t)(12-t) - 12\right]$$

$$= (1-t)^2\left(t^2 - (12+a)t + 12(a-1)\right).$$

Autovalori: 1 con molt. alg. ALMENO 2

λ_1, λ_2 radici del polinomio $q(t) = t^2 - (12+a)t + 12(a-1)$.

Radici di $q(t)$?

Discriminante di $q(t)$

$$\Delta = (12+a)^2 - 4\cdot 12(a-1)$$

$$= a^2 + 24a + 12^2 - 48a + 48$$

$$= a^2 - 24a + 12^2 + 48$$

$$= \underbrace{(a-12)^2}_{\geq 0} + 48 > 0.$$

Quindi $q(t)$ ammette due radici λ_1, λ_2 reali e DISTINTE.

Più precisamente, queste sono $\frac{12+a \pm \sqrt{\Delta}}{4}$, ma non è davvero necessario esplicitarle!

Gli autovalori di A sono quindi 1, λ_1, λ_2

$m_{alg}(1) \geq 2$ distinte (e reali) $m_{alg} \geq 1$

$$p_A(t) = (1-t)^2(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$$

La $m_{alg}(1)$ può essere al più 3 (perché $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

$\leadsto$ $2 \leq m_{alg}(1) \leq 3$

- Se $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1$, allora $m_{alg}(1) = 2$, $m_{alg}(\lambda_1) = m_{alg}(\lambda_2) = 1$.
- Se una tra λ_1, λ_2 è uguale a 1, allora $m_{alg}(1) = 3$ e $m_{alg}(\lambda) = 1$.
  quella $\neq 1$

Quando avviene il secondo caso? Precisamente quando $q(1) = 0$.

$$q(t) = t^2 - (12+a)t + 12(a-1)$$

$t = 1$

$$\underbrace{q(1)}_{=0} = 1 - (12+a) + 12(a-1) = 11a - 23$$

$=0 \iff 11a - 23 = 0 \iff a = \frac{23}{11}$

Quindi

$$m_{alg}(1) = \begin{cases} 2, & a \neq \frac{23}{11} \\ 3, & a = \frac{23}{11} \end{cases}$$

Autovalori di A: $a = \frac{23}{11} \Rightarrow 1, \lambda$

m_{alg}: $3, 1$

$a \neq \frac{23}{11} \Rightarrow 1, \lambda_1, \lambda_2$

m_{alg}: $2, 1, 1$

A diagonalizzabile $\iff$ $\forall \lambda$ autovalore di A, $m_{alg}(\lambda) = m_{geo}(\lambda)$.

L'unico caso da studiare è quello dell'autovalore 1

Recap: $1 \leq m_{geo} \leq m_{alg}$

$\Rightarrow$ se $m_{alg} = 1$, allora $m_{geo} = m_{alg} = 1$

$$m_{geo}(1) = \dim(\ker(A-I)) = 4 - rk(A-I)$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{a-1}{6} R_2} \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23-11a}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$2 - \frac{11}{6}(a-1)$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{23-11a}{12} R_4} \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

"cancella la terza riga indipendentemente dal valore di a"

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango $\begin{cases} 3, & a \neq 0 \\ 2, & a = 0 \end{cases}$.

$$m_{geo}(1) = 4 - rk(A-I) = \begin{cases} 1 & , \; a \neq 0 \\ 2 & , \; a = 0 \end{cases} \leftarrow$$

$m_{alg}(1) = \begin{cases} 3 & , \; a = 23/11 \\ 2 & , \; \underline{a \neq 23/11} \end{cases}$

Quindi $\quad m_{geo}(1) = m_{alg}(1) \iff \underline{a = 0}$

In tal caso, $m_{geo}(1) = m_{alg}(1) = 2$

Risposta: $\boxed{A \text{ diagonalizzabile } \iff a = 0}$

Nota. Per $a=0$, gli autovalori di A sono

- 1 con $m_{alg} = 2$;
- $\dfrac{12 \pm \sqrt{12^2+48}}{4} = 3 \pm \dfrac{\sqrt{12(12+4)}}{4} = 3 \pm \sqrt{12} = 3 \pm 2\sqrt{3}$ con $m_{alg} = 1$.

Esercizio Sia $V \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale definito dall'equazione

$$2x + y - 2z = 0$$

e sia $v = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare:

1) un vettore $w \in V$ tale che $\{v, w\}$ sia una base ortonormale di V;

2) un vettore del complemento ortogonale di V di norma 9.

Soluzione: già visto (TUTORATO del 03/06/2025).

Esercizio Sia $V \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni:
$$\begin{cases} x+2y-z-t = 0 \\ -x+3y+t = 0 \\ -x+8y-z+t = 0 \end{cases}$$

Dato $a \in \mathbb{R}$, sia $W_a = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Determinare:

1) $\dim V$;
2) i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che $\dim(V \cap W_a) = 1$;
3) i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che $\underbrace{V + W_a = \mathbb{R}^4}_{\text{equivalentemente, } \dim(V+W_a)=4}$.

Soluzione

1) Si ha $V = \ker \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$.

Recap.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in V \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ soddisfa il sistema $\begin{cases} x+2y-z-t = 0 \\ -x+3y+t = 0 \\ -x+8y-z+t = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\dim V = \dim(\ker A) \overset{L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3}{=} 4 - rk(A) = 4 - 2 = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 PIVOTS

2 e 3) Ci sono due possibili strade

$$2) \xrightarrow{\text{GRASSMAN}} 3)$$
$$3) \xrightarrow{\text{GRASSMAN}} 2)$$

a seconda della scelta di determinare l'intersezione $V \cap W_a$ oppure la somma $V + W_a$.

METODI STANDARD

- SOMMA : determino una base di entrambi

$$V = \text{Span}\{v_1, \dots, v_r\} \qquad W = \text{Span}\{w_1, \dots, w_s\}$$

$$\Rightarrow \quad V+W = \text{Span}\{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s\}$$

« le unisco »

- INTERSEZIONE: determino le (i sistemi di) equazioni cartesiane di entrambi

$$V : \begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_n = 0 \end{cases} \qquad W : \begin{cases} g_1 = 0 \\ \vdots \\ g_m = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V \cap W : \begin{cases} f_1 = 0 \\ f_n = 0 \\ g_1 = 0 \\ \vdots \\ g_m = 0 \end{cases}$$

« le metto tutte a sistema »

In base a ciò che preferite, potete scegliere quale strada seguire.
Le vediamo entrambe.

• SOMMA [3) $\rightsquigarrow$ 2)]

$$W_a = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

sono lin. indip. per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$

Dobbiamo determinare una base di $V = \ker(A)$. Abbiamo già visto

$$A \xrightarrow[\text{ELEMENTARI}]{\text{OPERAZIONI}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x+2y-z-t=0 \\ 5y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = x+2y-z = x-3y \\ z = 5y \end{cases}$$

Quindi il vettore generico $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ di V si scrive come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5y \\ x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 5y \\ -3y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

lin. indip.

da cui $V = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$. Dunque

$$V + W_a = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

e $\dim(V+W_a) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & a \\ 1 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3, & a=-3 \\ 4, & a \neq -3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & a \\ 1 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & a \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + 3R_2]{R_3 \to R_3 - 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a+5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a+5 \\ 0 & 0 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$$

PIVOT $\Updownarrow$ $a \neq -3$

Risposta al 3)

Quindi $V + W_a = \mathbb{R}^4 \iff \boxed{a \neq -3}$.

Ora, dalla formula di Grassmann:

Risposta al 2)

$$\dim(V \cap W_a) = \underbrace{\dim V}_{2} + \underbrace{\dim W_a}_{2} - \dim(V+W_a) = 4 - \dim(V+W_a) = \begin{cases} 1, & \boxed{a=-3} \\ 0, & a \neq -3 \end{cases}.$$

• INTERSEZIONE [2) $\rightsquigarrow$ 3)]

Dobbiamo determinare equazioni cartesiane per W_a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & y \\ 1 & a & z \\ 2 & 5 & t \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_1]{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & a & z-x \\ 0 & 5 & t-2x \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + 5R_2]{R_3 \to R_3 + aR_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & z-x+ay \\ 0 & 0 & t-2x+5y \end{pmatrix}$$

2 PIVOTS <=> entrambe nulle

Recap. Basta imporre che abbia esattamente 2 pivots (cioè la terza colonna è un vettore in W_a)

Quindi W_a è descritto dal sistema $\begin{cases} x - ay - z = 0 \\ 2x - 5y - t = 0 \end{cases}$.

Allora $V \cap W_a$ è descritto dal sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z - t = 0 \\ -x + 3y + t = 0 \\ \cancel{x + 8y - z + t = 0} \\ x - ay - z = 0 \\ 2x - 5y - t = 0 \end{cases}$$

Equazioni di V

abbiamo già visto in 1) che la terza riga si cancella con le prime due

Equazioni di W_a

Quindi $V \cap W_a = \operatorname{Ker} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -a & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$ e procediamo come nel punto 1):

$$B \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_1]{\substack{R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -a-2 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + 2R_2]{R_3 \to -R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & a+2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - (a+2)R_4]{R_2 \to R_2 - 5R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -a-3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Riordino le righe}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$$

PIVOT $\Updownarrow$ $a \neq -3$

Quindi:

$$\dim(V \cap W_a) = \dim(\ker B) = 4 - rk(B) = \begin{cases} 4 - 3 = 1, & \boxed{a = -3} \\ 4 - 4 = 0, & a \neq -3 \end{cases}$$

e, per Grassman,

$$\dim(V + W_a) = 4 - \dim(V \cap W_a) = 4 \iff \boxed{a \neq -3}.$$